Torsion of elliptic curves over number fields

著者	藤田 育嗣
号	46
学位授与番号	1983
URL	http://hdl.handle.net/10097/39010

氏名・(本籍)	藤田育嗣（ふじた やすつぐ）
学位の種類	博　士（理　学）
学位記番号	理博第１９８３号
学位授与年月日	平成15年３月24日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	Torsion of elliptic curves over number fields （代数体上の楕円曲線の等分点群の研究）
論文審査委員	（主査）教授 中村哲男 教授 森田康夫，高橋豊文

論　文　目　次

論　文　内　容　要　旨

Kを（有限次）代数体，EをK上の楕円曲線とする。Mordell-Weil の定理により，E上のK有理点のなす群$E(K)$は有限生成である。特に，$E(K)$の torsion 部分群$E(K)_{\mathrm{tors}}$は有限群である。K=**Q** の場合には，B. Mazur の定理により，群$E(K)_{\mathrm{tors}}$は次のいずれかに同型である：

Z/NZ, $\qquad N = 1,\ldots, 10, 12,$

$Z/2Z \oplus Z/2NZ$, $\qquad N = 1, 2, 3, 4.$

任意の代数体 K に対し，L. Merel は，$E(K)_{tors}$ の位数 $|E(K)_{tors}|$ は $\mathbf{Q}$ 上の K の次数のみに依存する定数によって上から評価できることを示した。

ここでは K をある拡大体 L に，あるいは，E を K 上同種な E' に置き換えたとき，$E(K)_{tors}$ がどのように変化するかを考察する。具体的には次の二つの問題を考える。

(1) 有理数体 $\mathbf{Q}$ 上定義された楕円曲線の，$\mathbf{Q}$ の初等アーベル 2 拡大体上の，即ち，type (2,...,2) の代数体上の torsion 部分群を分類する。

(2) 代数体 K 上定義された楕円曲線の K 同種類における K 上の最大 torsion の位数を求める。

(1) について，F を $\mathbf{Q}$ の最大初等アーベル 2 拡大体，即ち，

$$F := \mathbf{Q}(\{\sqrt{m} : m \in \mathbf{Z}\})$$

とすると，楕円曲線 E の F 上の torsion 部分群 $E(F)_{tors}$ は，高々 31 種類しかないことが知られている (M. Laska and M. Lorenz)。しかしその 31 種類の群すべてが $E(F)_{tors}$ として実現されるかどうかは知られていない。$E(\mathbf{Q})_{tors}$ が巡回群でない場合には Mazur の定理によりそれは $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ を部分群に含むので，Weierstrass 方程式として

$$E : y^2 = x(x+M)(x+N), \qquad M, N : 0 \text{ でない整数}$$

なるものがとれる。このとき K. Kwon（1997年）は，すべての 2 次体上 E の torsion 部分群を分類した; D. Qiu と X. Zhang（2001年）は，$E(\mathbf{Q})_{tors} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ を満たすある楕円曲線 E に対して，$\mathbf{Q}$ のすべての初等アーベル 2 拡大体上 E の torsion 部分群を分類した; 大泉勝志（2001年）は，$E(\mathbf{Q})_{tors} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ または $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ なる楕円曲線 E に対して，すべての type (2,2) の 4 次体上 E の torsion 部分群を分類した。ここでは，$E(\mathbf{Q})_{tors}$ が巡回群でない場合に，F 上，さらには $\mathbf{Q}$ のすべての初等アーベル 2 拡大体上 E の torsion 部分群を完全に分類する。

(2) について，E を代数体 K 上定義された楕円曲線，$C(E)$ を E の K 同種類とするとき，$C(E)$ には高々有限個しか K 同型類は存在しないので $C(E)$ の元でその K 上の torsion の位数が $C(E)$ の中で最大となるものが存在する。N. K. Katz は，その最大 torsion の位数を K の素点 $\wp$ での E の還元 $\widetilde{E}_{\wp}$ を使って表した。しかしその表示は E の K 同種類に依存する(最小 torsion の上からの評価については，$\mathrm{End}_K(E) \simeq \mathbf{Z}$ なる E に対しては K 同種類に依存しないものが知られている(R. Ross, 中村哲男))。ここでは，l を素数とするとき $E(K)_{tors}$ のシロー l 部分群 $E(K)_{(l)}$ の位数が $C(E)$ において最大となるための必要十分条件を与える(Theorem 1)。これを使えば，任意の素数 l に対して E の $C(E)$ における K 上の最大 l-torsion の位数 $l^M := \max_{E' \in C(E)} |E'(K)_{(l)}|$ を求めることができる。また $E(K)_{(l)}$ の位数が $C(E)$ において最大となるための十分条件もいくつか与える(Proposition 2.5)。Proposition 2.5 の条件は Theorem 1 の条件よりも一般に照合するのが容易なので，Theorem 1 を使う前に Proposition 2.5 の条件をチェックすることは l^M を求める際に有効である。

論文審査の結果の要旨

代数体上定義された楕円曲線は著しい特徴として，アーベル群という群構造を持つ。その有理点全体の集合は Mordell-Weil の定理により有限生成アーベル群である。特に，楕円曲線の有理点群の有限部分はトーション（有理等分点群）とよばれ整数論的にきわめて重要な研究対称である。藤田育嗣は楕円曲線のトーションについて２つの研究を行った。

第一の研究は，有理数体上定義された楕円曲線のトーションが定義体の初等的２-拡大によりどのように増加していくかという問題を扱ったものである。この問題に関してはこれまでにおおまかな研究が知られていたが，最近になって，楕円曲線の有理数体上のトーションが非巡回的である場合の研究が Kwon や Qiu-Zhang によって行われた。Kwon は２次体上のトーションを完全に決定した。Qiu-Zhang はあるタイプの楕円曲線に対し，すべての初等的２-拡大でのトーションの変化を分類した。藤田はこれらの研究をさらに押し進めて，有理数体上のトーションが非巡回的であるすべての楕円曲線に対し，任意の初等的２-拡大でのトーションの変化を具体的に記述することに成功した。この結果を得るには最大初等的２-拡大体上でのトーションの決定が本質的であり，いくつかの補助定理を設定することによりこれを解決した。これにより，有理数体上のトーションが非巡回的である場合のこの問題の完全な解決が得られたのである。

第二の研究は，与えられた代数体上定義された楕円曲線の同種写像による同値類の中を楕円曲線が動くとき，それらのトーションがどのように変化するかを決定する問題である。特に，同値類の中でトーションの位数の最大値，最小値の決定や最大や最小のトーションをもつ楕円曲線を具体的に構成できるかという問題である。藤田はこの問題に関し，いくつかの結果を得た。その主定理から最大トーションをもつ楕円曲線は素数 p に対し，p 次同種写像の列を構成することにより得られることになる。Katz のガロア表現を使う方法もあるが，藤田の結果は具体的な構成が可能であることに特徴がある。

藤田のこの研究は，楕円曲線の数論的研究に新しい知見をもたらすものであり，自立して研究活動を行うのに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって，藤田育嗣提出の本論文は，博士（理学）の論文として合格と認める。